

# מתמטיקה דיסקרטית



## תוכן העניינים

|    |                             |
|----|-----------------------------|
| 1  | 1. תורת הקבוצות.....        |
| 15 | 2. קומבינטוריקה בסיסית..... |
| 29 | 3. הבינום של ניוטון.....    |
| 31 | 4. תורת הגרפים.....         |
| 50 | 5. אינדוקציה.....           |

# מתמטיקה דיסקרטית

## פרק 1 - תורת הקבוצות

### תוכן העניינים

1. מבוא לתורת הקבוצות.....1
2. פעולות על קבוצות.....2
3. דיאגרמת ון.....4
4. קריאת קבוצות.....6
5. שאלות הוכחה.....8
6. דרך השלילה.....10
7. קבוצת חזקה.....11
8. מכפלה קרטזית.....13

## מבוא לתורת הקבוצות

## שאלות

(1) לגבי כל אחד מהממדים הבאים רשמו ב-□ את הסימן המתאים,  $\in, \notin, \subseteq, \subset, \supseteq, \supset, \neq$ . שימו לב שתיתכן יותר מתשובה אחת. אם התשובה היא  $\neq$ , נמקו.

א.  $1 \square \{1, \{1\}\}$       ב.  $\{1\} \square \{1, \{1\}\}$       ג.  $\{8, \emptyset\} \square \{1, 2, 8\}$

ד.  $\emptyset \square \{1, 2\}$       ה.  $\emptyset \square \{\emptyset, 1, 2\}$

ו.  $\{2\} \square \{\{1, \{2\}\}\}$       ז.  $\{2\} \square \{2, \{2, \{2\}\}\}$

ח.  $\{2\} \square \{2, \{2\}, \{\{2\}\}\}$       ט.  $\{2\} \square \{2, \{2, \{2\}\}, \{2\}\}$

י.  $\{\{2\}, \emptyset\} \square \{2, \{2\}, \{\{2\}\}\}$       יא.  $\emptyset \square \{1, \{\emptyset\}\}$

יב.  $\{\emptyset\} \square \{1, \{\emptyset\}\}$       יג.  $\{1, 2\} \square \{1, \{2\}\}$

יד.  $1 \square \mathbb{N}$       טו.  $\{1\} \square \mathbb{N}$

טז.  $1 \square \{\mathbb{N}\}$       יז.  $\{1\} \square \{\mathbb{N}\}$

## תשובות סופיות

(1) א.  $\in$       ב.  $\in, \subseteq, \subset$       ג.  $\notin, \supseteq$       ד.  $\in, \subseteq, \subset$       ה.  $\in, \subseteq, \subset$   
ו.  $\notin, \supseteq$       ז.  $\in, \subseteq, \subset$       ח.  $\in, \subseteq, \subset$       ט.  $\in, \subseteq, \subset$       י.  $\notin, \supseteq$   
יא.  $\in, \subseteq, \subset$       יב.  $\notin, \supseteq$       יג.  $\notin, \supseteq$       יד.  $\in, \notin$       טו.  $\in, \subseteq, \subset$   
טז.  $\notin$       יז.  $\notin, \supseteq$

## פעולות על קבוצות

### שאלות

(1) עבור  $A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 4, 5\}, C = \{1, 4, 6\}$  חשבו את הקבוצות הבאות:

א.  $(A \cup C) \setminus B$

ב.  $(A \cap B) \cup C$

ג.  $A \cap (B \cup C)$

ד.  $P(A)$

ה.  $C \setminus A$

(2) עבור  $A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 4, 5\}, C = \{1, 4, 6\}$ :

א. האם  $B \subseteq C$ ?

ב. האם  $\{1\} \subseteq B$ ?

ג. האם  $\{1\} \subseteq A$ ?

ד. האם  $\{1\} \in P(A)$ ?

ה. האם  $\{1\} \subseteq P(A)$ ?

ו. האם  $\{\{1\}\} \subseteq P(A)$ ?

ז. האם  $\{\{1\}, \emptyset\} \subseteq P(A)$ ?

(3) עבור  $A = \{1, \{3, *\}, \emptyset\}, B = \{4, \emptyset\}$  חשבו:

א.  $A \cup B$

ב.  $A \cap B$

ג.  $A - B$

ד.  $B - A$

ה.  $A \oplus B$

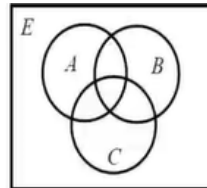
## תשובות סופיות

- (1) א.  $\{1, 2, 6\}$     ב.  $\{1, 3, 4, 6\}$     ג.  $\{1, 3\}$     ד.  $2 \notin P(A)$
- (2) א. לא.    ב. לא.    ג. כן.    ד. כן.
- ה. לא.    ו. כן.    ז. כן.
- (3) א.  $\{1, \{3, *\}, \emptyset, 4\}$     ב.  $\{\emptyset\}$     ג.  $\{1, \{3, *\}\}$     ד.  $\{4\}$
- ה.  $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

## דיאגרמת ון

## שאלות

1) באיור שלהלן דיאגרמת ון.

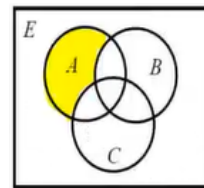


קווקוו את השטח המתאר את הקבוצות הבאות :

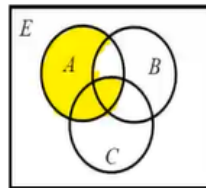
- |                        |                                     |
|------------------------|-------------------------------------|
| א. $(A - B) - C$       | ב. $A - (B - C)$                    |
| ג. $A \cap B^c$        | ד. $(A \cap B^c) \cup (C \cap A^c)$ |
| ה. $(A \cap B) \cap C$ | ו. $A \cap (B \cap C)$              |
| ז. $(A \cup B) \cup C$ | ח. $A \cup (B \cup C)$              |

תשובות סופיות

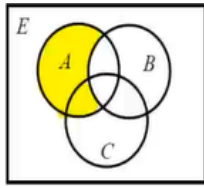
1 א.



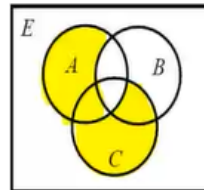
ב.



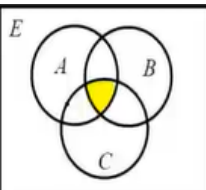
ג.



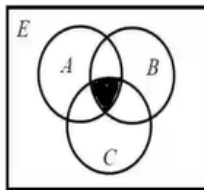
ד.



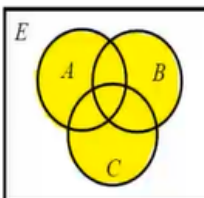
ה.



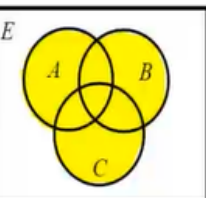
ו.



ז.



ח.



## קריאת קבוצות

## שאלות

(1) עבור  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ , רשמו בשתי דרכים את הקבוצות הבאות:

א. קבוצת המספרים טבעיים האי זוגיים,  $\mathbb{N}_{\text{odd}} = \{1, 3, 5, \dots\}$ .

ב. קבוצת כל הטבעיים שיש להם שורש ריבועי,  $A = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \dots\}$ .

ג. קבוצת כל הטבעיים שאין להם שורש ריבועי,

$B = \{2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, \dots\}$ .

ד. קבוצת כל השורשים של מספרים טבעיים,

$C = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \dots\}$ .

ה. קבוצת כל החזקות של 2,

$D = \{2^1, 2^2, 2^3, \dots\} = \{2, 4, 8, 16, 32, \dots\}$ .

(2) עבור  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ , חשבו את הקבוצות הבאות:

א.  $C = \{3n-1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ .

ב.  $K = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \geq 2 \rightarrow x^2 > 41\}$ .

ג.  $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \geq 7 \rightarrow x < 20\}$ .

ד.  $C = \{3n-1 \mid n \in \mathbb{N} \wedge \sqrt{n} \in \mathbb{N}\} = \{3n-1 \mid \sqrt{n} \in \mathbb{N}\}$ .

ה.  $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 8 \rightarrow x^2 < 67\}$ .

## תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. דרך 1: } \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \frac{n+1}{2} \in \mathbb{N} \right\}, \text{ דרך 2: } \{2n-1 \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

$$\text{ב. דרך 1: } \{n \in \mathbb{N} \mid \sqrt{n} \in \mathbb{N}\}, \text{ דרך 2: } \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

$$\text{ג. דרך 1: } \{n \in \mathbb{N} \mid \sqrt{n} \notin \mathbb{N}\}, \text{ דרך 2: } \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge \forall k \in \mathbb{N} \ n \neq k^2\}.$$

$$\text{ד. דרך 2: } \{\sqrt{n} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

$$\text{ה. דרך 1: } \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N} \ n = 2^k\}, \text{ דרך 2: } \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

$$(2) \quad \text{א. } C = \{2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, \dots\}$$

$$\text{ב. } \mathbb{Z} - \{\pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \dots\}$$

$$\text{ג. } \mathbb{Z} - \{20, 21, 22, 23, \dots\}$$

$$\text{ד. } \{2, 11, 26, 74, 107, 146, \dots\}$$

$$\text{ה. } \mathbb{Z} - \{9, 10, 11, 12, \dots\}$$

## שאלות הוכחה

## שאלות

בכל אחת משאלות הפרק יש לפעול כפי שמתואר בשאלה 1.

(1) תהיינה  $A, B$  קבוצות.

אם הטענה נכונה, ציינו זאת ותנו נימוק קצר מדוע.  
אם הטענה אינה נכונה, ציינו זאת, ותנו דוגמה נגדית.  
יש ערך רב יותר לדוגמה מינימלית; בדקו האם בדוגמה הנגדית יש פרטים מיותרים והסירו אותם.  
אם טענות יב-כא נכונות, נסו להוכיחן, ובמיוחד את טענה יב, שבה נשתמש יותר מאוחר להוכחת תכונות של קבוצת חזקה.

א. אם  $x \notin A$ , אז  $x \notin A \cup B$ .

ב. אם  $x \notin A \cup B$ , אז  $x \notin A$ .

ג. אם  $x \notin A$ , אז  $x \notin A \cap B$ .

ד. אם  $x \notin A \cap B$ , אז  $x \notin A$ .

ה. אם  $x \notin A$ , אז  $x \notin A - B$ .

ו. אם  $x \notin A - B$ , אז  $x \notin A$ .

ז. אם  $x \in B$ , אז  $x \notin A - B$ .

ח. אם  $x \notin A - B$ , אז  $x \in B$ .

ט.  $x \notin A \Leftrightarrow x \notin A - B$

י.  $x \in B \Leftrightarrow x \notin A - B$

יא. השלימו:  $x \notin A - B \Leftrightarrow \underline{\hspace{2cm}}$ .

יב.  $(A \subseteq B \wedge A \subseteq C) \Leftrightarrow A \subseteq B \cap C$

יג.  $(A \subseteq B \vee A \subseteq C) \Leftrightarrow A \subseteq B \cup C$

יד. אם  $A = A \cup B$ , אז  $A \subseteq B$ .

טו. אם  $A = A \cup B$ , אז  $B \subseteq A$ .

טז. אם  $A = A \cap B$ , אז  $A \subseteq B$ .

יז. אם  $A = A \cap B$ , אז  $B \subseteq A$ .

יח. אם  $A \subseteq B$ , אז  $A = A \cup B$ .

יט. אם  $B \subseteq A$ , אז  $A = A \cup B$ .

כ. אם  $A \subseteq B$ , אז  $A = A \cap B$ .

כא. אם  $B \subseteq A$ , אז  $A = A \cap B$ .

(2) תהיינה  $A, B, C$  קבוצות.

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם  $A = A - B$ , אז  $B = \emptyset$ .

ב. אם  $A = A - B$ , אז  $A \cap B = \emptyset$ .

ג. אם  $A = A \cup B$ , אז  $A \cap B = B$ .

ד. אם  $B = A \cup B$ , אז  $A \cap B = B$ .

ה. אם  $A \cap B = A$ , אז  $A = A \cup B$ .

ו. אם  $A \cap B = B$ , אז  $A = A \cup B$ .

ז. אם  $A \cup B = A \cup C$  וגם  $A \cap B = A \cap C$  אז  $B = C$ .

ח.  $A \cup (B - C) = (A \cup B) - C$ .

ט.  $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (A \cap C)$ .

י.  $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$ .

יא.  $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$ .

יב.  $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$ .

יג.  $(A - B) \cap (C - D) = (A \cap C) - (B \cup D)$ .

יד. להלן שתי טענות. הוכיחו את הנכונה והפריכו את השגויה:

1.  $A \cap B \cap C \subseteq A \oplus B \oplus C$

2.  $A \oplus B \oplus C \subseteq A \cap B \cap C$

## תשובות סופיות

- (1) א. לא נכונה. ב. נכונה. ג. נכונה. ד. לא נכונה. ה. נכונה.  
ו. לא נכונה. ז. נכונה. ח. לא נכונה. ט. לא נכונה. י. לא נכונה.  
יא.  $x \in B \vee x \notin A$  יב. נכונה. יג. לא נכונה. יד. לא נכונה.  
טו. נכונה. טז. נכונה. יז. לא נכונה. יח. לא נכונה. יט. נכונה.  
כ. נכונה. כא. לא נכונה.
- (2) א. לא נכונה. ב. לא נכונה. ג. נכונה. ד. לא נכונה. ה. לא נכונה.  
ו. נכונה. ז. נכונה. ח. לא נכונה. ט. לא נכונה. י. לא נכונה.  
יא. נכונה. יב. נכונה. יג. נכונה. יד. 1. נכונה. 2. לא נכונה.

## דרך השלילה

### שאלות

הוכיחו כל אחת מהטענות הבאות בדרך השלילה. במקום הטענה אם  $\alpha$ , אז  $\beta$ , נוכיח אם  $\neg\beta$ , אז  $\neg\alpha$ .

יש לזכור תמיד שלהנחת השלילה  $\neg\beta$  ולכל הנובע ממנה מתייחסים כנתון.

$$(1) \text{ אם } A \cap C = \emptyset, \text{ אז } A - (B - C) \subseteq (A - B) - C$$

$$(2) \text{ אם } A \subseteq B, \text{ אז } (A - C) \cup (C - B) \subseteq A \cap B$$

$$(3) \text{ אם } (A - C) \cap B = \emptyset, \text{ אז } (A \cup B) - C \subseteq A - B$$

$$(4) \text{ אם } B \subseteq A, \text{ אז } (C - A) \cup (B - C) \subseteq A - B$$

$$(5) \text{ אם } A \subseteq A \Delta B \text{ וגם } A \cap C = \emptyset, \text{ אז } B - C = B \Delta C$$

$$(6) \text{ אם } A \subseteq A \oplus B \text{ וגם } A \cap C = \emptyset, \text{ אז } B - C = B \oplus C$$

### תשובות סופיות

(1) הוכחה.

(2) הוכחה.

(3) הוכחה.

(4) הוכחה.

(5) הוכחה.

(6) הוכחה.

## קבוצת חזקה

## שאלות

(1) עבור  $A = \{3, \{\emptyset\}\}$ ,  $B = \{\{3\}, \{4, \emptyset\}\}$ ,  $C = \{3, \{3\}, \{\emptyset, 3\}\}$  רשמו את הקבוצות הבאות:

א. את  $P(C)$ ,  $P(B)$  ואת  $P(A)$ .

ב.  $P(A) \cap B$ ,  $P(A) \cap A$ ,  $P(C) \cap C$  ואת  $C - P(C)$ .

(2) עבור הקבוצות  $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ,  $B = \{1, \emptyset\}$

א. רשמו את  $P(A)$  ואת  $P(B)$ .

ב. רשמו את  $P(A) - P(B)$  ואת  $P(B) - P(A)$ .

ג.  $P(A) - A$  ואת  $P(A) - \{A\}$ .

(3) רשמו את  $P(\emptyset)$ , את  $P(P(\emptyset))$  ואת  $P(P(P(\emptyset)))$ .

(4) תהיינה  $A, B$  שתי קבוצות. הוכיחו או הפריכו:

א.  $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$

ב.  $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$

ג.  $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$

ד.  $P(A) \cap A \neq \emptyset$

ה.  $P(A) \cap A = \emptyset$

ו. תנו דוגמה לקבוצה  $A$  שמקיימת  $A \cap P(A) \cap P(P(A)) \neq \emptyset$ .

ז. אם  $\{A\} \subseteq P(B)$ , אז  $P(A) \subseteq P(B)$ .

את שתי הטענות הבאות הוכיחו בדרך השלילה:

ח. אם  $P(A) \subseteq P(A - B)$ , אז  $A \cap B = \emptyset$ .

ט. אם  $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$ , אז  $(A \subseteq B) \vee (B \subseteq A)$  (שאלה קשה).

(5) תהיינה  $A, B, C$  קבוצות כלשהן, ונתון  $P(B) - P(A) = P(B) - \{\emptyset\}$ .

הוכיחו כי  $B - A = B$ .

## תשובות סופיות

- (1) א.  $P(B) = \{\emptyset, \{\{3\}\}, \{\{4, \emptyset\}\}, \{\{3\}, \{4, \emptyset\}\}\}$ ,  $P(A) = \{\emptyset, \{3\}, \{\{\emptyset\}\}, \{3, \{\emptyset\}\}\}$   
 ב.  $P(C) = \{\emptyset, \{3\}, \{\{3\}\}, \{\{\emptyset, 3\}\}, \{3, \{3\}\}, \{3, \{\emptyset, 3\}\}, \{\{3\}, \{\emptyset, 3\}\}, \{3, \{3\}, \{\emptyset, 3\}\}\}$   
 ג.  $C - P(C) = \{3, \{\emptyset, 3\}\}$ ,  $P(C) \cap C = \{\{3\}\}$ ,  $P(A) \cap A = \emptyset$ ,  $P(A) \cap B = \{\{3\}\}$
- (2) א.  $P(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{\emptyset\}, \{1, \emptyset\}\}$ ,  $P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$   
 ב.  $P(B) - P(A) = \{\{1\}, \{1, \emptyset\}\}$ ,  $P(A) - P(B) = \{\{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$   
 ג.  $P(A) - \{A\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$ ,  $P(A) - A = \{\{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
- (3)  $P(P(P(\emptyset))) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ ,  $P(P(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ,  $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$
- (4) א. לא נכונה. ב. נכונה. ג. נכונה. ד. לא נכונה. ה. לא נכונה.  
 ו. ראו סרטון. ז. נכונה. ח. הוכחה. ט. הוכחה.
- (5) הוכחה.

## מכפלה קרטזית

## שאלות

(1) תהיינה  $A, B, C$  קבוצות. הוכיחו:

א.  $(A = B) \Leftrightarrow (A \times A = B \times B)$

ב.  $((B = \emptyset) \vee (A = \emptyset) \vee (A = B)) \Leftrightarrow (A \times B = B \times A)$

ג. הוכיחו כי לכל ארבע קבוצות  $A, B, C, D$  מתקיים

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

ד. אם  $((A \times A) \cup (B \times B) = (C \times C))$ , אז

$$(((B \subseteq A) \vee (A \subseteq B)) \wedge (A \cup B \subseteq C))$$

ה. הוכיחו כי לכל ארבע קבוצות  $A, B, C, D$  מתקיים

$$(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$$

(2) הוכיחו או הפריכו:

תהיינה  $A, B$  שתי קבוצות כלשהן ותהי  $S \subseteq A \times B$ .

אז קיימות  $C \subseteq A$  ו- $D \subseteq B$ , כך ש- $S = C \times D$ .

(3) הוכיחו או הפריכו:

קיימות שתי קבוצות  $A, B$ , כך ש- $|A \times B| = 24$  וגם  $|A \cap B| = 5$  (סימן  $||$  על קבוצה מסמן את מספר אבריה).

(4) הוכיחו או הפריכו:

לכל שלוש קבוצות  $A, B, C$  מתקיים  $A \times (B \oplus C) = (A \times B) \oplus (A \times C)$ .

(5) הדגימו שלוש קבוצות  $A, B, C$ , כך ש- $(A \times (B \times C)) \cap ((A \times B) \times C) \neq \emptyset$ .

**תשובות סופיות**

- (1) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הוכחה. ה. הוכחה.
- (2) לא נכונה.
- (3) לא נכונה.
- (4) נכונה.
- (5) ראו סרטון.

# מתמטיקה דיסקרטית

פרק 2 - קומבינטוריקה בסיסית

תוכן העניינים

1. מבוא לקומבינטוריקה בסיסית ..... 15
2. קומבינטוריקה יותר לעומק ..... 21

## מבוא לקומבינטוריקה בסיסית

### שאלות

(1) חשבו, ללא מחשבון :

א.  $\frac{4! \cdot 7!}{0! \cdot 10!}$

ב.  $\frac{14! \cdot 20!}{10! \cdot 17!}$

(2) הוכיחו את הזהויות הבאות :

א.  $(n-2)!(n^2 - n) = n!$

ב.  $(n-1)!n^2 + n! = (n+1)!$

ג.  $\frac{1}{(n-1)!} = \frac{(n+2)^2}{(n+2)!} + \frac{n^2 - 2}{(n+1)!}$

(3) חשבו ללא מחשבון :

א.  $\binom{5}{3}$

ב.  $\binom{4}{1}$

ג.  $\binom{10}{0}$

ד.  $\frac{1}{13} \binom{14}{11}$

(4) הוכיחו את הזהויות הבאות :

א.  $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$

ב.  $\frac{k}{n} \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$

ג.  $\frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$

ד.  $\binom{2n}{n} + \binom{2n}{n-1} = \binom{2n+1}{n}$

- (5) ענו על הסעיפים הבאים:
- א. כמה תוצאות אפשריות יש להטלת קובייה ואחר כך סביבון?  
רשמו את כל התוצאות.
  - ב. כמה תוצאות אפשריות יש להטלת קובייה ואחר כך סביבון ואחר כך מטבע? רשמו את כל התוצאות.
  - ג. עושים ניסוי ומטילים מטבע.  
אם יצא עץ אז מטילים סביבון ואם יצא פלי אז מטילים שוב את המטבע ולאחר מכן סביבון.  
כמה תוצאות אפשריות לניסוי?  
למשל (פלי, פלי, גדול) ו-(עץ, היה) הן תוצאות אפשריות.  
רשמו את כל התוצאות.
- (6) ענו על הסעיפים הבאים:
- א. מהאותיות ב, ג, ד, ה ניצור מילה בת שתי אותיות, לא בהכרח בעלת משמעות. רשמו את כל המילים האפשריות ואשרו עם עיקרון הכפל.
  - ב. מהאותיות א, ב, ג, ד, ה ניצור מילה בת שלוש אותיות, לא בהכרח בעלת משמעות. כמה מהמילים הנ"ל מתחילות באות א וגם א מופיעה פעם אחת בדיוק?  
(רמז: סעיף קודם)
- (7) במסעדה מציעים ארוחה עסקית, המורכבת ממנה ראשונה, עיקרית ושתייה. המנה הראשונה יכולה להיות סלט ירקות, סלט פטריות, סלט כבד קצוץ או מרק עוף. המנה העיקרית יכולה להיות סטייק אנטרקוט, שניצל, כבד אווז, דג, לזניה טבעונית, או שניצל מהצומח, ולשתייה מוצע, קפה, תה, לימונדה או קולה.
- א. כמה ארוחות אפשריות יש?
  - ב. כמה ארוחות אפשריות יש אם אין שתיה חמה?
  - ג. כמה ארוחות אפשריות יש למסעדה להציע לסועדת טבעונית?
- (8) כמה תת קבוצות יש לקבוצה  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ,
- א. בנות שלושה איברים? רשמו את כולן.
  - ב. בנות ארבעה איברים? השוו לסעיף א'.
  - ג. רשמו את כל התמורות של 0001111 והשוו לסעיפים קודמים.
  - ד. בכמה תמורות של המספרים 0011222222 כל 0 חייב להופיע ליד 1?
- (9) בכמה אופנים שונים ניתן להרכיב זוג מתלמידי כיתות א', אם בכיתה א' יש 1 יש 20 בנים ובכיתה א' 2 יש 15 בנות, כך ש:
- א. ללא הגבלה.
  - ב. זוג מעורב (בן ובת).
  - ג. זוג חד מיני (שני בנים, או שתי בנות).

**10** בלוטו יש 45 מספרים וצריך לנחש 6 מספרים ואת המספר החזק מתוך הקבוצה  $\{1, 2, 3, 4, \dots, 10\}$ . כמה אפשרויות יש?

**11** בכמה אופנים שונים ניתן לבחור מספר תלת ספרתי כך ש:  
 א. ללא הגבלה (זכרו שמספר לא יכול להתחיל באפס).  
 ב. כל ספרותיו שונות.  
 ג. כל ספרותיו שונות וסדר הספרות לא משנה?  
 (למשל 123 ו-321 נחשבים אותו דבר)  
 ד. כל ספרותיו שונות וגם בסדר יורד. כלומר, ספרת המאות גדולה או שווה מספרת העשרות גדולה או שווה מספרת היחידות.  
 ה. כל ספרותיו שונות וגם בסדר עולה. כלומר, ספרת המאות קטנה או שווה מספרת העשרות קטנה או שווה מספרת היחידות.

**12** כמה מספרים מורכבים מהמספרים 1,2,3,4,5,6,7, יש, כך ש:  
 א. באורך 7?  
 ב. באורך 7 וכל ספרה מופיעה פעם אחת לכל היותר?  
 ג. באורך 7 וכל ספרה מופיעה פעם אחת לפחות?

**13** בכמה אופנים שונים ניתן להושיב 5 זוגות נשואים על ספסל בן 10 מקומות (ענו גם לגבי שולחן עגול) כך ש:  
 א. ללא הגבלה.  
 ב. כל אישה תשב לצד בן-זוגה.  
 ג. גבר ישב רק ליד אישה.  
 ד. אף שתי נשים לא ישבו זו לצד זו ואף שני גברים לא ישבו זה לצד זה.

**14** כמה מספרים שונים בני חמש ספרות ניתן להרכיב מהספרות 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, כך ש:

- א. ללא הגבלה.
- ב. המספר מתחיל בספרה 2.
- ג. המספר לא מתחיל בספרה 2.
- ד. כל הספרות שונות.
- ה. הספרות 1 וגם 2 לא מופיעות.
- ו. בדיוק אחת מן הספרות 1 או 2 מופיעה.
- ז. ספרות 1 וגם 2 מופיעות.
- ח. חזרו על סעיפים ה-ז כאשר כל הספרות שונות.
- ט. כל הספרות שונות והספרות 1,2 מופיעות צמודות.
- י. כל הספרות שונות והספרות 1,2 מופיעות ולא צמודות.
- יא. כל הספרות שונות והספרות 1,2,3 מופיעות וצמודות.
- יב. כמו סעיף יא וגם הספרות 6,7 מופיעות וצמודות.
- יג. כמו סעיף יא וגם הספרות 6,7 מופיעות ולא צמודות.

**15** בכמה אופנים שונים ניתן להרכיב קוד סודי המורכב מארבע ספרות מתוך הספרות  $0, 1, 2, 3, \dots, 9$ , כך ש:

- ללא הגבלה?
  - הקוד מגדיר מספר זוגי?
  - הקוד מגדיר מספר המתחלק בחמש?
  - אין בקוד ספרות זהות?
  - יש בקוד לפחות שתי ספרות זהות?
  - יש בקוד בדיוק שתי ספרות זהות?
  - אין בקוד את הספרה 5?
  - הספרה 5 חייבת להופיע בקוד?
  - יש בקוד לפחות אחד מהספרות 4, 5?
  - אין בקוד לא את הספרה 4 ולא את הספרה 5?
  - אם יש את הספרה 5 אז אין ספרה יותר גדולה מ-5?
- הדרכה: רשמו שני מספרים המקיימים את התנאי ושניים שאינם מקיימים את התנאי וכתבו מהו המשלים של סעיף זה: נסחו זאת על דרך החיוב. כלומר, בלי להשתמש במילים 'אין' ו-'לא'.

**16** נתונה הקבוצה  $A = \{1, 2, 3, \dots, 17\}$ . כמה תת קבוצות יש ל- $A$  כך ש:

- ללא הגבלה?
- בנות 3 איברים?
- בעלות 3 איברים לפחות?
- מכילות רק מספרים זוגיים? רק אי זוגיים?
- מכילים רק מספרים מאותה זוגיות?
- מכילות אי זוגי אחד לפחות?
- מכילות זוגי אחד לפחות וגם אי זוגי אחד לפחות?
- אם הן מכילות את 1 אז מכילות גם את 2? (סעיף קשה; אפשר לנסות בעזרת משלים)
- מכילות ממש את  $\{1, 2, 3\}$ .

**17** בכמה אופנים שונים ניתן להכניס 7 כדורים ל-13 תאים, כך ש:

- הכדורים שונים ומותר יותר מכדור בתא?
- הכדורים זהים ומותר יותר מכדור בתא?
- הכדורים שונים ואסור יותר מכדור בתא?
- הכדורים זהים ואסור יותר מכדור בתא?
- הכדורים שונים ויש תא יחיד ובו שני כדורים ובכל היתר כדור יחיד?
- הכדורים זהים ויש תא יחיד ובו שני כדורים ובכל היתר כדור יחיד?

**18** נתונים חמישה כדורים ונתונים שבעה צבעים שונים (למשל שחור, לבן, אפור, צהוב אדום כחול וסגול).  
 בכמה אופנים שונים ניתן לצבוע את הכדורים ולסדרם בשורה אם:  
 א. סדר הכדורים בשורה משנה.  
 ב. סדר הכדורים בשורה לא משנה.  
 כלומר, ארבעה כדורים שחורים ואחד לבן זה נחשבו אותו דבר לא משנה היכן הלבן ממוקם.

**19** עבור  $A = \{1, 2, 3\}$   $B = \{x, y\}$ , חשבו כמה פונקציות יש מ- $A$  ל- $B$  ומ- $B$  ל- $A$ , ואשרו עם עיקרון הכפל.

## תשובות סופיות

- (1) א.  $\frac{1}{30}$  ב.  $\frac{1001}{285}$
- (2) הוכחה.
- (3) א. 10 ב. 4 ג. 1 ד. 28
- (4) הוכחה.
- (5) א. 24 ב. 48 ג. 12
- (6) א. 16 ב. 16 ג. 16
- (7) א. 96 ב. 48 ג. 16
- (8) א. 35 ב. 35 ג. 35 ד. 180
- (9) א. 595 ב. 300 ג. 295
- (10) 81,450,600
- (11) א. 900 ב. 648 ג.  $\binom{10}{3}$  ד.  $\binom{10}{3}$  ה.  $\binom{9}{3}$
- (12) א.  $\binom{7}{7}$  ב. אין ג. אין
- (13) א. ספסל: 10!, מעגל: 9! ב. ספסל: 5!·2<sup>5</sup>, מעגל: 4!·2<sup>5</sup> ג. ספסל: 2!·(5!)<sup>2</sup>, מעגל: 4!·5! ד. ספסל: 2!·(5!)<sup>2</sup>, מעגל: 4!·5!
- (14) א. 7<sup>5</sup> ב. 7<sup>4</sup> ג. 6·7<sup>4</sup> ד. 3·4·5·6·7 ה. 5<sup>5</sup>
- ו.  $2(6^5 - 5^5)$  ז.  $7^5 - 2 \cdot 6^5 + 5^5$  ח. (ה) 5! ט. (ו) 10·5!
- י. 6·5! יא. 216 יב. 24 יג. 12
- (15) א. 10<sup>4</sup> ב. 5·10<sup>3</sup> ג. 2·10<sup>3</sup> ד. 10·9·8·7
- ה.  $10^4 - 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$  ו.  $9^4 \cdot \binom{4}{2} \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8$
- ז.  $9^4 + 6^4 - 5^4$  י. 8<sup>4</sup> יא.  $10^4 - 8^4$  ט.  $10^4 - 8^4$  ח.  $10^4 - 9^4$
- (16) א. 2<sup>17</sup> ב. 680 ג. 130,918 ד. זוגיים: 2<sup>8</sup>, אי זוגיים: 2<sup>9</sup>, אותה זוגיות: 768
- ה. לפחות אי זוגי אחד: 130,816, לא מאותה זוגיות: 130,304
- ו. 98,304 ז. 16,383
- (17) א. 13<sup>7</sup> ב.  $\binom{19}{7}$  ג.  $\binom{131}{61}$  ד.  $\binom{13}{7}$
- ה.  $13 \cdot \binom{7}{2} \binom{12}{5} 5!$  ו.  $13 \cdot \binom{16}{5}$
- (18) א. 7<sup>5</sup> ב.  $\binom{11}{5}$
- (19) מ-A ל-B: 8, מ-B ל-A: 9

## קומבינטוריקה יותר לעומק

### שאלות

- (1) בכמה אופנים ניתן לסדר 10 אנשים בשורה כך ש:
  - א. ללא הגבלה.
  - ב. אבי ובני סמוכים.
  - ג. אבי, בני וגדי סמוכים.
  - ד. אבי ובני לא סמוכים.
  - ה. אבי ובני סמוכים וגם גדי ודני סמוכים.
  - ו. אבי ובני סמוכים וגדי ודני לא סמוכים.
  
- (2) בכיתה בה יש 10 בנים ו-15 בנות יש להרכיב נבחרת כדורסל בה יש לפחות שני בנים ולפחות שתי בנות.  
בכמה דרכים ניתן לעשות זאת?
  
- (3) בכמה אופנים שונים ניתן להניח 8 צריחים על לוח שחמט  $8 \times 8$  מבלי שאף צריח יאיים  
על חברו כך ש:
  - (צריח מאיים על חברו אם הוא נמצא באותה שורה או באותה עמודה של חברו)
  - א. כל הצריחים הם לבנים.
  - ב. שלושה צריחים הם לבנים וחמישה הם שחורים.
  - ג. הצריחים נלקחים מתוך שקית ובה מלאי בלתי מוגבל של צריחים לבנים ומלאי בלתי מוגבל של צריחים שחורים.
  
- (4) בכמה מספרים 6 ספרתיים מופיעה הספרה:
  - א. 0 פעם אחת בדיוק.
  - ב. 0 פעם אחת לפחות.
  - ג. 7 פעם אחת לפחות.
  - ד. 7 פעם אחת בדיוק.
 יש לזכור שמספר לא יכול להתחיל בספרה 0.
  
- (5) ענו על הסעיפים הבאים:
  - א. יהי  $n$  טבעי.
 בכמה תת קבוצות של  $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$  יש אי זוגי אחד לפחות?  
 ב. בכמה תת קבוצות של  $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$  יש לפחות  $n+1$  איברים?

- (6) בכמה אופנים שונים ניתן לחלק 10 לימונדות זהות, כוס קולה 1 וכוס קינלי 1 ל-4 תלמידים צמאים, כך שכל תלמיד מקבל לפחות משקה אחד והקולה והקינלי ניתנים לתלמידים שונים?
- (7) בכמה דרכים ניתן לחלק 400 כדורים זהים ל-3 תאים, כך ש:  
 א. יש תא ובו יותר מ-200 כדורים.  
 ב. בכל תא מספר זוגי של כדורים.  
 ג. בשני תאים מתוך השלוש מספר אי-זוגי של כדורים ובתא אחד מספר זוגי של כדורים.
- (8) 7 אנשים נכנסים למעלית בבניין בן 13 קומות.  
 בכמה אופנים הם יכולים ללחוץ על כפתורי המעלית כך ש:  
 א. המעלית תעצור בקומה החמישית? (יתכן ותמשיך הלאה משם)  
 ב. המעלית תעצור בקומה החמישית לכל היותר.  
 ג. המעלית תגיע לפחות עד הקומה החמישית.  
 ד. המעלית תעצור בקומה החמישית (ולא תמשיך משם הלאה).
- (9) בכמה דרכים ניתן לחלק  $n$  כדורים לבנים זהים ו- $n$  כדורים צבעוניים (שונים) ל- $2n$ , כך שבכל תא יהיה:  
 א. לכל היותר כדור אחד.  
 ב. לכל היותר כדור לבן אחד ואין מגבלה על מספר הצבעוניים.  
 ג. לכל היותר כדור צבעוני אחד ואין הגבלה על מספר הלבנים.  
 ד. מספר שווה של לבנים וצבעוניים.
- (10) במלבן בן  $k$  שורות ו- $m$  עמודות יש לסמן  $\times$  או  $\circ$  בכל משבצת.  
 א. הראו כי יש  $(2^m - 1)^k$  דרכים לעשות זאת, כך שבכל שורה יופיע  $\times$  אחד לפחות.  
 ב. בכמה דרכים ניתן לעשות זאת, כך שיופיע  $\circ$  אחד לפחות בכל עמודה.  
 ג. הסיקו כי  $2^{mk} \leq (2^m - 1)^k + (2^k - 1)^m$ .
- (11) ענו על הסעיפים הבאים:  
 א. כמה תמורות של  $1, 2, 3, \dots, n$  מספר 2 מופיע בין 1 ל-3? (לאו דווקא צמודים. למשל, עבור  $n = 7$  התמורה 4352981 חוקית, כי 2 נמצא בין 1 ל-3)  
 ב. בכמה תמורות של  $1, 2, 3, \dots, 5$  מימין למספר 3 אין מספרים קטנים מ-3. (למשל 24135 חוקית ואילו 43152 לא חוקית)

- (12) ענו על הסעיפים הבאים :
- א. בכמה אופנים שונים ניתן לחלק 12 אנשים לשלושה זוגות ושתי שלשות?  
 ב. כמו סעיף א, אך בנוסף דני ודנה לא נמצאים באותה קבוצה.
- (13) כמה פתרונות בשלמים אי-שליליים יש לכל אחת מהמשוואות הבאות?
- א.  $x_1 + x_2 + \dots + x_7 = 20$   
 ב.  $x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 14$   
 ג.  $(x_1 + x_2 + x_3)(x_4 + x_5 + x_6) = 18$
- (14) בכמה דרכים ניתן לבחור ועדה בת  $n$  אנשים מתוך  $n$  זוגות נשואים, כך ש :
- א. בוועדה לא ישתתף אף זוג נשוי.  
 ב. מספר הגברים יהיה שווה למספר הנשים.  
 ג. מספר הגברים יהיה קטן ממש ממספר הנשים.
- (15) מצאו כמה פונקציות  $f : \{1, 2, 3, \dots, 3n-1, 3n\} \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, n-1, n\}$  מקיימות את התנאי הבא : לכל איבר בתמונה יש בדיוק 3 מקורות.
- (16) מה מספר הדרכים לפזר 50 כדורים אדומים ו-20 כדורים כחולים ל-10 תאים, כך שבכל תא מספר הכדורים האדומים יהיה לפחות כמספר הכדורים הכחולים?
- (17) בכמה דרכים ניתן לחלק קבוצה בגודל  $2n$  לקבוצה בגודל  $n$  ולזוגות? (ניתן להניח כי  $n$  זוגי)
- (18) בכמה דרכים ניתן לסדר בשורה 8 פילים שונים, 2 שועלים זהים ושתי תרנגולות זהות, כך שהפילים מסודרים משמאל לימין על פי משקלם בסדר עולה, ואף שועל לא יהיה צמוד לתרנגולת?
- (19) בכמה דרכים ניתן לחלק 100 כדורים לבנים ו-100 כדורים צבעוניים (כל אחד בצבע שונה) ל-250 תאים, כך שיתקיימו שני התנאים הבאים : יהיה לפחות תא אחד שמכיל יותר מכדור לבן אחד, ויהיה לפחות תא אחד שמכיל יותר מכדור צבעוני אחד.
- (20) בכמה דרכים ניתן לסדר  $n$  גברים ו- $n$  נשים במעגל כך שבני אותו מין לא ישבו זה לצד זה? כנ"ל לגבי שורה.

(21) יש לבחור קבוצה של שישה ילדים מבין תלמידי כיתות א-1 ו-2, באופן ששלושה מהם יהיו מ-א-1 ושלושה מ-א-2. מספר הבנים בקבוצה צריך להיות שווה למספר הבנות בקבוצה (3 ו-3). ב-א-1 יש 10 בנים ו-15 בנות וב-א-2 יש 15 בנים ו-10 בנות. בכמה אופנים ניתן לבחור את הקבוצה?

(22) בכמה קבוצות של  $n$  כדורים ב-10 צבעים יש לפחות כדור אחד מכל צבע?

(23) כמה פונקציות  $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  (כאשר  $n \geq 1$ ) מקיימות את התנאי  $f(k) \neq f(k+1)$  לכל  $1 \leq k \leq n-1$ ?

(24) כמה פונקציות  $f: \{1, 2, 3, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, n\}$  חח"ע ועל יש, המקיימות  $f(k) - k$  זוגי לכל  $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ?

(25) בכמה דרכים ניתן לחלק 60 כדורים צבעוניים (כל אחד בצבע שונה) ו-90 כדורים לבנים זהים ל-100 תאים, כך שיתקיימו שני התנאים הבאים גם יחד: יהיה לפחות תא אחד שמכיל יותר מכדור צבעוני אחד וכמו כן בכל תא יהיו לכל היותר 50 כדורים לבנים.

(26) בכמה דרכים ניתן לחלק 4 בנות, 2 תפוזים, ו-4 תפוחים ל-10 אנשים, כך שכל אחד יקבל בדיוק פרי אחד? שימו לב שפירות מאותו סוג נחשבים זהים.

(27) בכמה דרכים ניתן לבנות שורה מ- $k \geq 0$  כדורים לבנים זהים ו- $m \geq 0$  כדורים צבעוניים שונים (ושונים מלבן)?

(28) כמה תת קבוצות בגודל 7 יש לקבוצה  $A = \{1, 2, 3, \dots, 12, 13\}$ , שיש בהם שני איברים עוקבים?

(29) תהי  $A_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ , כאשר  $n \in \mathbb{N}_{\text{odd}}$ , ותהי  $a_1, a_2, \dots, a_n$  תמורה כלשהי של  $A_n$ . הוכיחו כי המכפלה  $(a_1 - 1)(a_2 - 2) \cdots (a_n - n)$  בהכרח זוגית (יש לפתור).

(30) מטילים  $n$  קוביות. כמה תוצאות יש אם:  
א. הקוביות שונות.  
ב. הקוביות זהות.

**(31)** נתונה הקבוצה  $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ .

כמה זוגות של קבוצת  $(C, D)$ ,  $C, D \subseteq A$ , כך ש:

א. ללא הגבלה. עבור  $A = \{1, 2\}$ , רשמו את כל הפתרונות.

ב.  $C \cap D = \emptyset$ . עבור  $A = \{1, 2\}$ , רשמו את כל הפתרונות.

ג.  $C \subseteq D$ . עבור  $A = \{1, 2\}$ , רשמו את כל הפתרונות.

ד.  $C \cup D = A$ . עבור  $A = \{1, 2\}$ , רשמו את כל הפתרונות.

ה. אם  $2 \in C$ , אז  $2 \in D$  (עבור  $A = \{1, 2, 3\}$ , הדגימו זוג שמקיים את

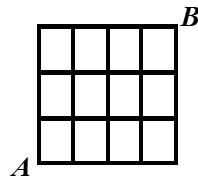
הדרישה וזוג שאינו מקיים את הדרישה).

ו. אם יש מספר אי זוגי ב- $C$ , אז יש כזה גם ב- $D$  (שימו לב שלא נתון ש- $n$  הוא זוגי).

**(32)** חרגול נמצא בנקודה  $A$  בשריג המתואר להלן. בכל שלב יכול החרגול להתקדם

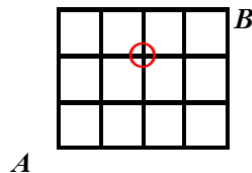
צעד אחד ימינה או צעד אחד למעלה.

א. בכמה אופנים שונים יכול החרגול להגיע מנקודה  $A$  לנקודה  $B$ ?

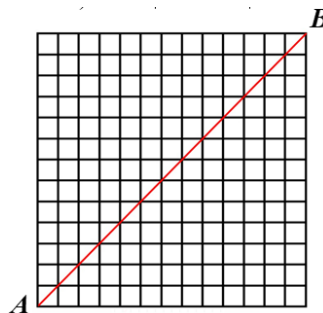


ב. בכמה אופנים הוא יכול לעשות זאת מבלי לעבור דרך הנקודה המסומנת

להלן  $(2, 2)$ ?



- 33** החרגול החביב מהשאלה הקודמת לא התעייף (מדובר בחרגול ספורט) ונמצא עכשיו בנקודה  $A$  בשריג  $n \times n$  המתואר להלן ( $13 \times 13$  להמחשה). תזכורת: בכל שלב יכול החרגול להתקדם צעד אחד ימינה או צעד אחד למעלה. בכמה דרכים יכול החרגול להגיע מנקודה  $A$  לנקודה  $B$ ? (שימו לב שהשריג בשאלה הוא  $n \times n$ )
- ללא הגבלה.
  - מבלי לעבור דרך אף אחד מהנקודות  $(5,9), (7,3)$ ? (מה המשלים של הסעיף?)
  - מבלי לעבור דרך אף אחד מהנקודות  $(5,3), (7,9)$ ?
  - מבלי לגעת באלכסון האדום? (פרט לנקודת ההתחלה ונקודת הסיום)



- 34** למורה צילה מאגר בלתי מוגבל של חרוזים בשלושה צבעים: אדום, צהוב וירוק (חרוזים מאותו צבע נחשבים זהים). בכיתה ג' 27 תלמידים. בשיעור מלאכה המורה צילה נותנת לכל ילד שקית והילד בוחר חמישה חרוזים ומכניס לשקית. בסוף השיעור המורה מכניסה את כל השקיות למחסן. כמה תכולות מחסן אפשריות?

## תשובות סופיות

- (1) א.  $10!$  ב.  $2!9!$  ג.  $3!8!$  ד.  $8!9!$  ה.  $4!8!$  ו.  $14!8!$   
(2) שתי דרכים.
- (3) א.  $8!$  ב.  $8! \cdot \binom{8}{3}$  ג.  $8! \cdot 2^8$
- (4) א.  $5 \cdot 9^5$  ב.  $9 \cdot 10^5 - 9^6$  ג.  $9 \cdot 10^5 - 8 \cdot 9^5$  ד.  $9^5 + 5 \cdot 8 \cdot 9^4$
- (5) א.  $2^{2n} - 2^n$  ב.  $|A| = \frac{2^{2n} - \binom{2n}{n}}{2}$
- (6)  $4 \cdot 3 \cdot \binom{11}{3}$
- (7) א.  $3 \cdot \binom{201}{2}$  ב.  $\binom{202}{2}$  ג.  $3 \cdot \binom{201}{2}$
- (8) א.  $13^7 - 12^7$  ב.  $5^7$  ג.  $13^7 - 4^7$  ד.  $5^7 - 4^7$
- (9) א.  $\binom{2n}{n} n!$  ב.  $\binom{2n}{n} \cdot (2n)^2$  ג.  $\binom{2n}{n} \cdot n! \cdot \binom{3n-1}{n}$  ד.  $(2n)^2$
- (10) א. ראו בסרטון. ב.  $(2^k - 1)^m$  ג. שאלת הוכחה.
- (11) א.  $\frac{1}{3}5!$  ב.  $\frac{1}{3}5!$
- (12) א.  $\binom{12}{2} \binom{10}{2} \binom{8}{2} \binom{6}{3} \binom{3}{3} \cdot \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{2!}$
- ב.  $\binom{12}{2} \binom{10}{2} \binom{8}{2} \binom{6}{3} \binom{3}{3} \cdot \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{2!} - \left( \binom{10}{2} \binom{8}{2} \binom{6}{3} \binom{3}{3} \cdot \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2!} + 10 \binom{9}{2} \binom{7}{2} \binom{5}{2} \cdot \frac{1}{3!} \right)$
- (13) א.  $\binom{26}{20} \binom{26}{6}$  ב.  $\binom{16}{2} + \binom{11}{2} + \binom{6}{2}$  ג.  $2 \left[ 3 \cdot \binom{20}{2} + \binom{4}{2} \cdot \binom{11}{2} + \binom{5}{2} \cdot \binom{8}{2} \right]$
- (14) א.  $2^n$  ב.  $\binom{n}{\frac{n}{2}}^2$  ג.  $n$  זוגי:  $\frac{\binom{2n}{n} - \binom{n}{\frac{n}{2}}^2}{2}$ ,  $n$  אי זוגי:  $\frac{\binom{2n}{n}}{2}$
- (15)  $\frac{(3n)!}{6^n}$
- (16)  $\binom{29}{9} \binom{39}{9}$
- (17)  $\frac{(2n)!}{n! \left(\frac{n}{2}\right)! 2^{\frac{n}{2}}}$

(18) 1638

(19) 
$$\left( \binom{349}{100} - \binom{250}{100} \right) \left( 250^{50} - \frac{250!}{200!} \right)$$

(20)  $2(n!)^2$

(21) 
$$\binom{10}{3}^2 + \binom{10}{2}^2 + \binom{15}{1}^2 + \binom{10}{1}^2 \binom{15}{2}^2 + \binom{15}{3}^2$$

(22) 
$$\binom{n-1}{9}$$

(23)  $n(n-1)^{n-1}$

(24) 
$$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil! \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor!$$

(25) 
$$\left( 100^{60} - \frac{100!}{40!} \right) \cdot \left( \binom{189}{90} - 100 \cdot \frac{138}{39} \right)$$

(26) 
$$\frac{10!}{4!4!2!}$$

(27) 
$$\frac{(m+k)!}{k!}$$

(28)  $2^{13} - 1$

(29) שאלת הוכחה.

(30) א.  $6^n$  ב.  $\binom{n+5}{5}$

(31) א.  $4^n$  ב.  $3^n$  ג.  $3^n$  ד.  $3^n$  ה.  $3 \cdot 4^{n-1}$  ו.  $4^n - \left( 2^n - 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \right) 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$

(32) א.  $\binom{7}{4}$  ב. 17

(33) א.  $\binom{2n}{n}$  ב.  $|\bar{A} \cap \bar{B}| = \binom{2n}{n} - \left( \binom{10}{3} \binom{2n-10}{n-3} + \binom{14}{5} \binom{2n-14}{n-5} \right)$

ג.  $|\bar{A} \cap \bar{B}| = \binom{2n}{n} - \left( \binom{8}{3} \binom{2n-8}{n-3} + \binom{16}{7} \binom{2n-16}{n-7} - \binom{8}{5} \binom{8}{2} \binom{2n-16}{7} \right)$

ד.  $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$

(34) 
$$\binom{47}{20}$$

# מתמטיקה דיסקרטית

פרק 3 - הבינום של ניוטון

תוכן העניינים

1. הבינום של ניוטון..... 29

## הבינום של ניוטון

### שאלות

(1) הוכיחו אלגברית וקומבינטורית את הזהות  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k = 3^n$

(2) הוכיחו לכל  $n \geq 0$  את הזהות  $6^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{2n-k}$

(3) הוכיחו את השוויון

$$2^n = 3^n - n3^{n-1} + \binom{n}{2} 3^{n-2} - \dots + (-1)^k \binom{n}{k} 3^{n-k} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} 3^0$$

(4) הוכיחו שלכל  $n$  טבעי מתקיים  $\sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k} = 2^{2n}$

(5) הוכיחו בדרך אלגברית וקומבינטורית את הזהות  $\binom{m+n}{2} = \binom{n}{2} + \binom{m}{2} + mn$

(6) הוכיחו כי  $\binom{2n}{n}$  זוגי לכל  $n \in \mathbb{N}$

(7) הוכיחו כי  $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} 2^{k-1} = \frac{n}{3} \cdot 3^n$

(8) הוכיחו כי  $\forall x, y, n \in \mathbb{N}^+, \binom{x+y}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{x}{k} \binom{y}{n-k}$

(9) הוכיחו את השוויון  $\sum_{k,j=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{j} \binom{n}{k+j} = \binom{3n}{n}$

(10) הוכיחו בדרך אלגברית וקומבינטורית את הזהות  $\binom{r}{m} \binom{m}{k} = \binom{r}{k} \binom{r-k}{m-k}$

**(11)** הוכיחו שלכל  $n \geq 0$  ולכל  $0 \leq k \leq n$  מתקיים  $\binom{n}{k} + 2\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2} = \binom{n+2}{k+2}$

**(12)** הוכיחו אלגברית וקומבינטורית את הזהות

$$(2n-1) \cdot (2n-3) \cdots 1 = \frac{\binom{2n}{2} \cdot \binom{2n-2}{2} \cdots \binom{2}{2}}{n!}$$

**(13)** הוכיחו את הזהות  $\sum_{k=1}^n k(n-k) \binom{2n}{k} \binom{3n}{n-k} = 6n^2 \binom{5n-2}{n-2}$

**(14)** הוכיחו את השוויון  $\sum_{n=0}^N \binom{k-1+n}{n} = \binom{k+N}{N}$

**(15)** הוכיחו כי אם  $n > 0$  זוגי, אז  $2^n > \binom{n}{\frac{n}{2}}$

**(16)** כמה מבין המספרים בפיתוח הבינום  $(\sqrt{2} + \sqrt[4]{7})^{80}$  שלמים?

**(17)** הוכיחו כי לכל  $n$  טבעי מתקיים  $n^n - (n-1)^n = \sum \binom{n}{i} (n-1)^{n-i}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

# מתמטיקה דיסקרטית

## פרק 4 - תורת הגרפים

### תוכן העניינים

|    |                      |
|----|----------------------|
| 31 | 1. מבוא לתורת הגרפים |
| 37 | 2. גרף דו צדדי       |
| 40 | 3. עצים              |
| 44 | 4. מעגלים מיוחדים    |
| 48 | 5. איזומורפיזם       |

## מבוא לתורת הגרפים

### שאלות

הערה: חלק קטן משאלות פרק זה מסתמכות על מושג העץ. רצוי ללמוד את הפרק עצים שהוא פרק חשוב ביותר.

(1) ענו על הסעיפים הבאים:

- א. יהי  $G = (V, E)$  גרף על 43 צמתים: 10 צמתים מדרגה 7, 17 צמתים מדרגה 6, 12 צמתים מדרגה 4 והיתר מדרגה 1.  
כמה קשתות יש ב- $G$ ?  
ב. הוכיחו כי בכל גרף מספר הצמתים מדרגה אי-זוגית הוא זוגי.

(2) עבור  $n \in \mathbb{N}$  נגדיר גרף פשוט  $G_n$ , כך שצמתיו הם  $2^n$  הסדרות הבינאריות באורך  $n$ , ושני קודקודים מחוברים ביניהם בקשת אם ורק אם הם נבדלים בקואורדינטה אחת.  
מה מספר הקשתות של  $G_5$  ושל  $G_n$ ? (גרף כזה נקרא גרף הקובייה)

(3) נגדיר גרף  $G = (V, E)$  באופן הבא:  $V = \{A \in P\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \mid |A| = 3\}$   
 $E = \{\{A, B\} \mid |A \cap B| = 1\}$ , למשל  $\{\{2, 4, 7\}, \{1, 4, 6\}\} \in E$ , כי בחיתוך יש איבר אחד.  
א. מהו מספר הצמתים? מה דרגת כל קודקוד? מה מספר הקשתות?  
ב. האם  $G$  דו"צ?

(4) חזרו על שאלה קודמת עבור הגרף  $G = (V, E)$  באופן הבא:  
 $V$  כמו קודם ו- $E = \{\{A, B\} \mid A \cap B = \emptyset\}$ .

(5) יהי  $G = (V, E)$  על 7 צמתים: 4 מהצמתים הם מדרגה 5 וכל יתר הדרגות קטנות מ-3.  
מהן האפשרויות הנכונות?

- א. יש גרף פשוט כזה, שהוא קשיר.  
ב. יש גרף פשוט כזה, אבל הוא לא קשיר.  
ג. יש גרף כזה, אבל הוא לא פשוט ולא קשיר.  
ד. יש גרף כזה, והוא לא פשוט וקשיר.

(6) נתונים שני גרפים  $G_1, G_2$  על 5 קודקודים. סדרת דרגותיו של  $G_1$  היא  $1, 2, 3, 4, 4$  וסדרת דרגותיו של  $G_2$  היא  $2, 2, 3, 4, 5, 6$ .

לגבי כל אחד משני הגרפים קבעו איזו מן הטענות הבאות נכונה:

- יש גרף פשוט וקשיר כזה.
- יש גרף קשיר כזה, אבל הוא לא פשוט.
- יש גרף פשוט כזה, אבל הוא לא קשיר.
- יש גרף כזה, אבל הוא חייב להיות לא פשוט ולא קשיר.
- לא קיים גרף כזה.

(7) ענו על הסעיפים הבאים:

- א. יהי  $G$  גרף פשוט בעל  $n$  קודקודים. הוכיחו כי אם לכל שני קודקודים  $x, y \in V$  מתקיים  $d(x) + d(y) \geq n - 1$ , אז  $G$  קשיר.
- ב. הוכיחו באינדוקציה כי גרף על  $n$  קודקודים ופחות מ- $n - 1$  קשתות אינו קשיר.

(8) יהי  $G$  גרף פשוט בעל  $n$  קודקודים.

הוכיחו כי אם:  $|E| > \binom{n-1}{2}$  (\*) אז  $G$  קשיר, כאשר  $|E|$  מספר הקשתות.

הראו גם כי חסם זה הדוק. כלומר, הראו גרף פשוט  $G$ , עבורו  $|E| = \binom{n-1}{2}$ , כך ש- $G$  אינו קשיר. זה מראה שלא ניתן לשפר את אי השוויון (\*).

(9) יהי  $G = (V, E)$  גרף פשוט ויהיו  $x, y \in V$  שני קודקודים לא שכנים.

הוכיחו כי אם  $d(x) + d(y) \geq n$ , אז יש ל- $x$  ול- $y$  לפחות שני שכנים משותפים.

(10) יהי  $G$  גרף פשוט על  $n \geq 2$  צמתים, ויהיו  $u, v \in V$  קודקודים שאינם שכנים.

הוכיחו כי אם:  $d(u), d(v) \geq \frac{n+1}{2}$  אז יש ל- $u, v$  לפחות שלושה שכנים משותפים.

(11) יהי  $G = (V, E)$  גרף, כך ש- $(n \geq 2)$ ,  $V = P_2(\{1, 2, \dots, n\})$ ,  $A \cap B = \emptyset$ ,  $e \in E \Leftrightarrow A, B \in V$  כאשר  $A, B \in V$ .

- א. חשבו את  $|V|$ .
- ב. מהי דרגת כל צומת?
- ג. הוכיחו כי אם  $n \geq 5$  אזי  $G$  קשיר (רמז: דרך השלילה).

- (12) יהי  $G$  גרף פשוט על 10 קודקודים שיש בו 41 קשתות. הוכיחו:
- א. יש לפחות שני קודקודים ב- $G$  שדרגתם היא 9.
- ב.  $G$  קשיר.
- (13) יהי  $G = (V, E)$  גרף פשוט. הוכיחו כי אם  $|V| = |E|$ , אז ב- $G$  יש מעגל, ואם  $G$  קשיר, אז המעגל יחיד.
- (14) יהי  $G$  גרף פשוט קשיר בן 7 קודקודים, שסדרת דרגותיו היא 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1. כמה מעגלים פשוטים יש בגרף?
- (15) יהי  $G$  גרף פשוט בעל  $n$  קודקודים. הוכיחו כי אם לכל קודקוד  $x \in V$  מתקיים  $d(x) \geq \frac{n}{2}$ , אז ב- $G$  מעגל באורך 4.
- (16) הוכיחו כי בכל גרף פשוט על 100 קודקודים, שבו כל הדרגות הן לפחות 10, יש מעגל באורך  $\geq 4$ .
- (17) יהי  $G$  גרף פשוט. הוכיחו כי לפחות אחד מבין הגרפים  $G, \bar{G}$  קשיר. בניסוח שקול: הוכיחו כי בכל צביעת קשתות הגרף השלם  $K_n$  בשני צבעים לפחות, אחד הגרפים החד צבעיים הוא קשיר.
- (18) הוכיחו כי בכל צביעת קשתות הגרף השלם  $K_6$  בשני צבעים, יש משולש מונוכרומטי (משולש חד צבעי).
- (19) הוכיחו כי בכל קבוצה של 9 אנשים יש בהכרח לפחות 4 המכירים זה את זה או לפחות 3 שאף שניים מהם אינם מכירים זה את זה.
- (20) יהי  $G$  גרף שקודקודיו הם תתי קבוצות בנות 4 אברים של הקבוצה  $\{1, 2, \dots, n\}$ , (כאשר  $n$  גדול מ-6). שני קודקודים מחוברים בקשת בגרף אם בחיתוך שלהם יש שני אברים בדיוק. לדוגמה, הקודקוד  $\{1, 2, 3, 4\}$  שכן של  $\{1, 2, 7, 8\}$ , אך לא של  $\{1, 2, 3, 7\}$ .
- כמה קודקודים בגרף הם שכנים של  $\{1, 2, 3, 5\}$ ,  $\{1, 2, 3, 4\}$  או  $\{1, 2, 4, 5\}$ ?

(21) הוכיחו כי בכל צביעת קשתות הגרף השלם  $K_{17}$  ב-8 צבעים יש מעגל שכל קשתותיו צבועות בצבע אחד (מעגל מונוכרומטי).

(22) כמה מעגלים פשוטים באורך  $3 \leq k \leq n$  יש בגרף השלם  $K_n$  על קבוצת הקודקודים  $\{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$ ?

שני מעגלים המתקבלים אחד מהשני על ידי סיבוב נחשבים זהים. למשל, עבור  $n=5$ , שני המעגלים  $1, 2, 3, 4, 5, 1$  ו- $3, 4, 5, 1, 2, 3$  נחשבים זהים, ואילו המעגלים  $1, 2, 3, 1$  ו- $1, 3, 2, 1$  אינם זהים.

(23) נצבע ב- $n \geq 2$  צבעים את קשתות הגרף השלם  $K_n$ , כך שכל צבע מופיע לפחות פעם אחת. הוכיחו כי קיים מעגל שכל קשתותיו צבועות בצבעים שונים.

(24) יהי  $G$  גרף קשיר על 13 קודקודים, שניתן לצבוע בשלושה צבעים (כלומר, אפשר לצבוע את הקודקודים בשלושה צבעים, כך שאין שני קודקודים מאותו צבע שמחוברים בקשת). הוכיחו שיש בגרף אנטי קליקה בגודל 5 (כלומר, 5 קודקודים שאף אחד מהם לא מחובר לאף אחד אחר).

(25) נתונים שלושה גרפים בעלי אותה קבוצת קודקודים  $G_1 = (V, E_1)$ ,  $G_2 = (V, E_2)$  ו- $G_3 = (V, E_3)$ . נגדיר  $G = (V, E_1 \cup E_2 \cup E_3)$  כאיחוד שלושת הגרפים, ונניח כי לכל קודקוד ב- $V$  דרגתו ב- $G$  היא לפחות 6. הוכיחו כי לפחות אחד מהגרפים  $G_1, G_2, G_3$  אינו חסר-מעגלים. שאלה זו מופיעה גם בפרק עצים.

(26) יהי  $G_n$  גרף פשוט שקודקודיו הם כל תתי-קבוצות של  $\{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$ , למעט  $\emptyset$  ו- $\{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$  עצמה. שני קודקודים הם שכנים אם ורק אם אף אחד אינו מוכל במשנהו.

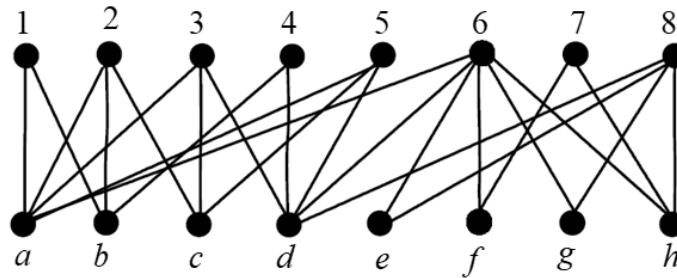
א. הוכיחו כי לכל  $n \geq 2$ ,  $G_n$  קשיר.

ב. הוכיחו כי אם  $v$  תת קבוצה בת  $k$  אברים של  $\{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$  אז דרגתה כקודקוד ב- $G_n$  היא:  $2^n - 2^{n-k} - 2^k + 1$ .

ג. הוכיחו כי לכל  $n \geq 3$  קיים מעגל המילטון ב- $G_n$ . מותר להסתמך על סעיפים קודמים ועל העובדה ש- $2^{n-1} + 2 \leq 2^{n-k} + 2^k$ .

- (27) כמה זיווגים מושלמים יש, (שאלה זו מופיעה גם בפרק גרף דו צדדי)  
 א. בגרף המלא  $K_5$  ?  
 ב. בגרף המלא  $K_6$  ?  
 ג. בגרף הדו"צ המלא  $K_{5,5}$  ?  
 (הגדרת גרף דו"צ בפרק גרף דו צדדי)  
 ד. בגרף הדו"צ המלא  $K_{5,5}$ , כאשר מחקנו שלוש קשתות שיש להן צומת משותף?

- (28) ענו על הסעיפים הבאים:  
 א. הוכיחו כי בגרף הבא אין זיווג מושלם.  
 ב. מצאו זיווג מקסימום.  
 ג. מהו המספר המינימלי של קשתות שיש להוסיף לגרף כך שיהיה זיווג?



- (29) יהי  $G = (V, E)$  גרף פשוט, ונגדיר גרף חדש  $H = (V, E')$  באופן הבא:  

$$E' = \{ \{x, y\} \mid x, y \in V \wedge \exists z \in V : \{ \{x, z\}, \{y, z\} \} \subseteq E \}$$
  
 הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:  
 א. אם  $G$  קשיר, אז  $H$  קשיר.  
 ב. אם  $G$  קשיר, אז  $H$  לא קשיר.  
 ג. אם  $H$  קשיר, אז  $G$  קשיר.  
 ד. אם  $H$  קשיר, אז  $G$  לא קשיר.

- (30) נתון גרף  $G$ .  
 הוכיחו כי אם  $\bar{G}$  לא קשיר, אז לכל שני קודקודים  $x, y$  ב- $G$  מתקיים  $d(x, y) \leq 2$  (כאשר  $d(x, y)$  הוא המרחק בין  $x$  ל- $y$ ).  
 (31) נתונה קבוצה בת 5 קודקודים  $V = \{v, u, t, s, r\}$ .  
 כמה גרפים שונים על קבוצת הקודקודים  $V$  מקיימים שדרגת כל קודקוד קטנה ממש מ-4?

**(32)** יהי  $G$  גרף חסר מעגלים כעל 20 קודקודים ו-15 קשתות. כמה רכיבי קשירות בגרף?

**(33)** הוכיחו כי בכל צביעה של קשתות  $K_{2t+1}$  ב- $t$  צבעים, נקבל מעגל חד צבעי.

## גרף דו צדדי

## שאלות

- (1) נגדיר גרף  $G = (V, E)$  באופן הבא:  $V = \{A \in P\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \mid |A| = 3\}$   
 $E = \{\{A, B\} \mid |A \cap B| = 1\}$   
 א. האם  $G$  דו צדדי?  
 ב. האם  $G$  דו קשיר?
- (2) יהי  $G = (V, E)$  גרף, כאשר כל צומת של  $G$  היא סדרה בינארית באורך 6. למשל, 000000 צומת של  $G$ . שני צמתים הם מחוברים אם הם נבדלים זה מזה בשני מקומות בדיוק. למשל, 010111 מחובר ל-011101, כי הם נבדלים במקומות השלישי והחמישי.  
 א. כמה קשתות יש ל- $G$ ?  
 ב. האם  $G$  קשיר? כמה רכיבי קשירות יש ל- $G$ ?  
 ג. האם  $G$  דו"צ?  
 ד. (למי שלמדו גרפים מישוריים, האם  $G$  מישורי?)
- (3) מחקו  $n-1$  קשתות מן הגרף הדו-צדדי השלם  $K_{2,n}$  (כאשר  $n \geq 1$ ) והתקבל גרף  $G$  שאין בו קודקודים מבודדים (כלומר, אין בו קודקודים שדרגתם אפס). הוכיחו ש- $G$  הוא עץ (שאלה זו מופיעה גם בפרק עצים).
- (4) מה הגרף המשלים של הגרפים הדו"צ  $K_{4,4}, K_{5,5}$ , ובאופן כללי  $K_{n,n}$ ?
- (5) יהיו  $G_1 = (V_1, E_1)$  ו- $G_2 = (V_2, E_2)$  שני גרפים, כאשר האיחוד שלהם מוגדר להיות  $G_1 \cup G_2 = (V, E)$  כש- $V = V_1 \cup V_2, E = E_1 \cup E_2$ .  
 הוכיחו או הפריכו:  
 א. איחוד של שני גרפים דו"צ הוא גרף דו"צ.  
 ב. איחוד של שני גרפים דו"צ על קבוצות צמתים זרות הוא גרף דו"צ.  
 ג. איחוד של  $n$  גרפים דו"צ על קבוצות צמתים זרות הוא גרף דו"צ.  
 ד. איחוד של  $n$  גרפים דו"צ על קבוצות צמתים זרות בזוגות הוא גרף דו"צ.
- (6) הציגו את  $K_{16}$  כאיחוד של 4 גרפים דו"צ.

(7) הוכיחו או הפריכו :

אם  $G = (V, E)$  גרף דו"צ  $k$  רגולרי שצדדיו הם  $A, B$ , אז  $|A| = |B|$ .(8) יהיו  $G_1, G_2, G_3, \dots, G_7$  שבעה גרפים דו"צ שונים על אותה קבוצת צמתים  $V$ .לכל גרף צדדים  $A_i, B_i$ , כאשר  $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ . כמוכן שבסימונים אלהמתקיים  $A_i \cup B_i = V$ ,  $A_i \cap B_i = \emptyset$  לכל  $1 \leq i \leq 7$ .יהי  $G$  איחוד כל הגרפים האלה, כאשר אם יש קשר המופיע בכמה גרפים ניקח

רק קשת אחת, כך שאין קשתות מרובות והגרף שהגדרנו הוא גרף פשוט.

לכל צומת ב- $G$  נתאים סדרה בת שבע אותיות לפי הצדדים אליה הוא שייךבגרפים  $G_1, G_2, G_3, \dots, G_7$ , בהתאמה.למשל, אם  $v$  שייך לקבוצות  $A_1, A_2, B_3, B_4, B_5, A_6, A_7$ , כלומר בשני הגרפיםהראשונים הוא בצד  $A$ , בשלושת הגרפים הבאים בצד  $B$ , ובשני הגרפיםהאחרונים בצד  $A$ , אז נשמיט את האינדקסים ונתאים לו את המילה  $AABBBAA$ .כלומר, ל- $v$  שלנו תתאים המילה  $AABBBAA$ , ובאופן דומה, לכל צומת תתאים

מילה בת 7 אותיות.

הוכיחו כי אם לשני צמתים  $u, v$  מתאימה אותה מילה אז אין צומת ב- $G$  בין  $u$ לבין  $v$ .(9) יהי  $G$  גרף דו צדדי  $V = V_1 \cup V_2$ ,  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ , ונתון כי  $G$  הוא  $d$  רגולרי,  $d \geq 1$ .הוכיחו כי  $|V_1| = |V_2|$ .

(10) הוכיחו או הפריכו :

א. אם לגרף יש שני רכיבי קשירות בדיוק, אז הגרף המשלים הוא דו צדדי.

ב. אם לגרף יש שני רכיבי קשירות בדיוק, אז הגרף המשלים אינו דו צדדי.

(11) כמה זיווגים מושלמים יש,

(שאלה זו מופיעה גם בפרק גרף דו צדדי)

א. בגרף המלא  $K_5$ ?ב. בגרף המלא  $K_6$ ?ג. בגרף הדו"צ המלא  $K_{5,5}$ ?

(הגדרת גרף דו"צ בפרק גרף דו צדדי)

ד. בגרף הדו"צ המלא  $K_{5,5}$  כאשר מחקנו שלוש קשתות שיש להן צומת משותף?(12) יהי  $G = (V, E)$  גרף דו-צדדי פשוט, וכן  $|V| = n$ .הוכיחו כי  $|E| \leq \frac{n^2}{4}$ .

**13** נגדיר גרף שצמתיו הם  $P(\{1, 2, 3, \dots, n\})$  (יש  $2^n$  צמתים), ושני צמתים מחוברים, אם אחד מהם מכיל את השני והם נבדלים באיבר אחד.

(למשל,  $\{1, 2, 5, 7\}$ ,  $\{1, 5, 7\}$  מחוברים)

א. הוכיחו כי  $G$  קשיר.

ב. הוכיחו כי  $G$  רגולרי.

ג. הוכיחו כי  $G$  הוא גרף דו"צ.

**14** הוכיחו או הפריכו: אם  $G = (V, E)$  אוילרי דו צדדי, אז:  $|V| \in \mathbb{N}_{\text{even}}$ .  
 (שאלה זו מופיעה גם בפרק מעגלים מיוחדים)

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## עצים

## שאלות

- (1) יהי  $T$  עץ שעל  $n \geq 2$  קודקודים שלו בדיוק שני עלים.  
מהן דרגות קודקודי  $T$ ? רשמו אותן לכל  $n \geq 2$ , בסדר עולה משמאל לימין (סדרת הדרגות) והוכיחו נכונות תשובתכם.
- (2) יהי  $T = (V, E)$  עץ.  
הוכיחו שאם כל דרגותיו אי-זוגיות, אזי גם  $|E|$  הוא מספר אי-זוגי.
- (3) יהי  $T$  עץ על  $n \geq 4$  קודקודים. אורך המסלול הפשוט הארוך ביותר ב- $T$  הוא  $n-2$  (יש מסלול פשוט באורך  $n-2$  ואין מסלול ארוך יותר).  
מהן דרגות קודקודי  $T$ ? רשמו אותן בסדר עולה משמאל לימין (סדרת הדרגות).
- (4) יהי  $T$  עץ. נוסיף ל- $T$  קודקוד שנקרא לו  $v$ , וקשתות מ- $v$  לחלק מקודקודי  $T$ .  
מה צריכה להיות דרגת  $v$  כדי שבגרף המתקבל יהיה בדיוק מעגל פשוט אחד? הוכיחו שאם דרגת  $v$  תהיה גדולה יותר, בגרף יהיה יותר ממעגל פשוט אחד.
- (5)  $G$  גרף עם 20 קודקודים ו-15 קשתות ללא מעגלים.  
כמה רכיבי קשירות בגרף?
- (6) נתונה קבוצה של 10 קודקודים, ואוסף שקפים שעליהם מצוירים עצים על אותם עשרה קודקודים. גיורא מניח מספר כלשהו של שקפים זה על זה ומקפיד שאף קשת משקף אחד לא תכסה על אותה קשת בשקף אחר (כלומר, אין אף קשת משותפת לשני עצים שונים).  
הוכיחו שהגרף שגיורא מקבל מאיחוד העצים שמצוירים על השקפים לא יכול להיות גרף שכל דרגותיו שוות ל-5.  
רמז: חשבו את מספר הקשתות בגרף.
- (7) יהיו  $T_1 = (V, E_1)$ ,  $T_2 = (V, E_2)$  שני עצים על אותה קבוצת קודקודים, ונגדיר גרף  $G$  על אותה קבוצת קודקודים, שקשתותיו  $E = E_1 \cup E_2$ .  
הוכיחו כי קיים  $x \in V$ , כך ש- $d(x) \leq 3$  (דרגתו של  $x$  ב- $G$ ).

(8) יהיו  $T_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$ ,  $T_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$  עצים, ונגדיר גרף  $G$  כך:  $G = \langle V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \rangle$ .

א. נתון כי  $V_1 \cap V_2 = \{v\}$ .

האם  $G$  בהכרח עץ? נמקו.

ב. נתון כי  $E_1 \cap E_2 = \{e\}$ .

האם  $G$  בהכרח עץ? נמקו.

(9) יהי  $T$  עץ על  $n \geq 3$  קודקודים ויהי  $v$  קודקוד ב- $T$  מדרגה 2. יהי  $k$  מספר רכיבי הקשירות של  $T-v$  (שהוא תת הגרף של  $T$  המתקבל ממחיקת  $v$ , והקשתות ש- $v$  קצה שלהן). מה הם הערכים האפשריים עבור  $k$ ? הוכיחו.

(10) יהי  $T$  עץ בעל  $n$  קודקודים, ונתון שדרגותיו הן 1, 3, 5 בלבד. יש 7 קודקודים מדרגה 3 ו-10 מדרגה 5. כמה עלים יש בעץ?

(11) יהי  $T = (V, E)$  עץ, שבו  $|V| = n$ . דרגות צמתי  $T$  הן 1, 3, 5 בלבד. מספר הצמתים שלהם מדרגה 3 הוא 10 ומספר הצמתים שלהם מדרגה 5 הוא 12. כמה עלים (צמתים מדרגה 1) יש לעץ?

(12) הוכיחו כי בכל צביעת קשתות הגרף השלם  $K_n$  בשני צבעים קיים עץ פורש מונוכרומטי. הערה: עץ פורש הוא עץ שקודקודיו הם כל קודקודי  $G$  וקשתותיו הן חלק מקשתות  $G$ .

(13) יהי  $G = (V, E)$ ,  $|V| = n$ , גרף פשוט וחסר מעגלים, שבו  $k$  רכיבי קשירות. הוכיחו כי  $|E| = n - k$ .

(14) מהי העוצמה הגדולה ביותר האפשרית לקבוצה של עצים על קבוצת הקודקודים  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , שאף שניים מהם אינם איזומורפיים? (שאלה זו מופיעה גם בפרק איזומורפיזם)

(15) מחקו  $n-1$  קשתות מן הגרף הדו-צדדי השלם  $K_{2,n}$  (כאשר  $n \geq 1$ ), והתקבל גרף  $G$  שאין בו קודקודים מבודדים (כלומר, אין בו קודקודים שדרגתם אפס). הוכיחו ש- $G$  הוא עץ (שאלה זו מופיעה גם בפרק גרף דו צדדי).

16) ענו על הסעיפים הבאים :

א. נתונים שלושה גרפים בעלי אותה קבוצת קודקודים  $G_1 = (V, E_1)$ ,

$$G_2 = (V, E_2) \text{ ו- } G_3 = (V, E_3).$$

נגדיר  $G = (V, E_1 \cup E_2 \cup E_3)$  כאיחוד שלושת הגרפים, ונניח כי לכל

קודקוד ב-  $V$  דרגתו ב-  $G$  היא לפחות 6.

הוכיחו כי לפחות אחד מהגרפים  $G_1, G_2, G_3$  אינו חסר-מעגלים.

ב. יהיו  $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2), G_3 = (V_3, E_3)$  שלושה עצים על אותה

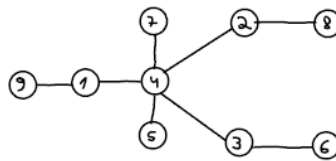
קבוצת צמתים  $V$ .

לכל צומת  $v \in V$  נסמן ב-  $d_i(v)$  את הדרגה של  $v$  ב-  $G_i$ , אשר  $i = 1, 2, 3$ .

$$\sum_{i=1}^3 d_i(v) \leq 5, v \in V, \text{ שעבורו } v \in V \text{ הוכיחו כי קיים צומת}$$

17) מיהו העץ הממוספר המותאם למילה  $(1, 1, 3, 4, 3, 6, 10, 1)$ ?

18) מהי סדרת פרופר של העץ הבא?



19) בכמה עצים שונים על קבוצת הצמתים  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  אין שום צומת מדרגה זוגית?

20) בכמה עצים על קבוצת הקודקודים  $\{1, 2, 3, 4, \dots, 10\}$  כל העלים הם מספרים זוגיים?

21) כמה עצים שונים יש על הקודקודים  $\{1, \dots, n\}$ , שלהם בדיוק שני עלים?

22)  $T$  הוא עץ בעל 60 צמתים, מתוכם בדיוק 10 צמתים מדרגה 3 ואין בצמתים מדרגה גדולה מ-3.

א. הדגימו עץ כזה.

ב. מצאו את מספר העלים ללא שימוש בקוד פרופר.

ג. מצאו את מספר העלים בעזרת קוד פרופר.

23) בכמה עצים על הקודקודים  $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$  יש שלושה עלים והם (ורק הם): 8, 9, 10?

**(24)** יהי  $G$  גרף פשוט על  $n$  קודקודים המכיל מעגל המילטון, ונתון כי על ידי השמטת קשתות המעגל מתקבלת גרף של  $G$  שהוא עץ. האם ניתן על סמך הנתונים לקבוע כמה קשתות בגרף  $G$ ? אם כן, מהו מספר הקשתות?  
(שאלה זו מופיעה גם בפרק מעגלים מיוחדים)

**(25)** מהי העוצמה הגדולה ביותר האפשרית לקבוצה של עצים על קבוצת הקודקודים  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , שאף שניים מהם אינם איזומורפיים?  
(שאלה זו מופיעה בפרק איזומורפיזם)

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## מעגלים מיוחדים

הערה: חלק קטן משאלות פרק זה מסתמכות על מושג העץ. רצוי ללמוד את הפרק עצים שהוא פרק חשוב ביותר.

### דוגמאות

(1) צפו בסרטון על מעגלי המילטון והוכיחו כי:

- א. תנאי אורה אינו תנאי הכרחי.
- ב. החסם במשפט אורה הוא הדוק.

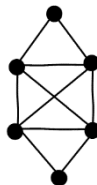
(2) בשאלה זו נחקור את הקשר בין המושג מעגל אוילר לבין מעגל המילטון. הוכיחו או הפריכו:

- א. אם  $G$  המילטוני, אז  $G$  אוילרי.
- ב. אם  $G$  המילטוני, אז  $G$  לא אוילרי.
- ג. אם  $G$  לא המילטוני, אז  $G$  אוילרי.
- ד. אם  $G$  לא המילטוני, אז  $G$  לא אוילרי.
- ה. לעניין הקשר בין המושגים, מה המסקנה המתבקשת מסעיפים א-ד?
- ו. אם  $G$  הוא גם אוילרי וגם המילטוני, אז יש בו מסלול שהוא בעת ובעונה אחת גם מסלול אוילר וגם מסלול המילטון.
- ז. אם  $G$  אוילרי וגם המילטוני, אז  $G$  הוא מעגל פשוט.
- ח. אם יש ב- $G$  מסלול שהוא בעת ובעונה אחת מעגל אוילר וגם מעגל המילטון, אז  $G$  הוא מעגל פשוט.

### שאלות

(1) ענו על הסעיפים הבאים:

- א. מצא מעגל אוילר, מעגל המילטון, ומסלול המילטון שאינו מעגל המילטון בגרף הבא:



- ב. הוכיחו את הטענה הבאה, או תנו דוגמה נגדית והסבר שמראה שאכן מדובר בדוגמה נגדית: אם בגרף יש מעגל המילטון, אז יש בו מעגל אוילר.

- (2) נגדיר גרף  $G = (V, E)$  באופן הבא:  $V = \{A \in P\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \mid |A| = 3\}$   
 $E = \{\{A, B\} \mid |A \cap B| = 1\}$ . למשל,  $\{\{2, 4, 7\}, \{1, 4, 6\}\} \in E$ .  
 א. מהו מספר הצמתים? מה דרגת כל קודקוד? מה מספר הקשתות?  
 ב. האם  $G$  דו"צ?  
 ג. האם  $G$  אוילרי?  
 ד. האם  $G$  המילטוני?
- (3) מהו האורך המירבי של מסלול ב- $K_{2n+1}$ ? נמקו.
- (4) הוכיחו בכל גרף שכל דרגותיו 4 ניתן לצבוע את קשתותיו כך מכל קודקוד יצאו בדיוק שתי קשתות מכל צבע.
- (5) ענו על הסעיפים הבאים:  
 א. יהי  $G$  גרף שקודקודיו הן תתי קבוצות בנות 4 איברים של  $\{1, 2, 3, \dots, 8\}$ , כאשר שני קודקודים מחוברים אם ורק אם בקבוצות יש 2 איברים בדיוק. האם ב- $G$  יש מעגל המילטון?  
 ב. יהי  $K_{m,n}$  גרף דו צדדי שלם. הוכיחו כי  $K_{m,n}$  המילטוני  $\Leftrightarrow m = n$ .
- (6) יהיו  $G_1 = (V_1, E_1)$ ,  $G_2 = (V_2, E_2)$ ,  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ,  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$  שני גרפים אוילריים פשוטים. נגדיר  $G = (V, E)$  באופן הבא:  $V = V_1 \cup V_2$ ,  $E = E_1 \cup E_2$ , ומלכדים צומת  $u_1 \in V_1$  עם צומת  $u_2 \in V_2$ . האם  $G$  אוילרי? אם נחבר את  $u_1$  עם  $u_2$  במקום ללכד אותם, האם כעת  $G$  אוילרי?
- (7) יהי  $G = (V, E)$  גרף אוילריאני בעל מספר אי זוגי של צמתים. הוכיחו כי יש ב- $G$  לפחות שלושה צמתים בעלי אותה דרגה. (שובך היונים, מספר הקודקודים  $2n+1$  ויש  $n$  דרגות אפשריות כי כולן זוגיות)
- (8) יהי  $G$  גרף בעל שני רכיבי קשירות,  $T_1$  ו- $T_2$ , שכל אחד מהם עץ. נוסיף שתי קשתות חדשות ל- $G$  (קבוצת הקודקודים נשארת ללא שינוי) ויתקבל גרף חדש  $\tilde{G}$ .  
 א. הוכיחו שב- $\tilde{G}$  בהכרח יש מעגל.  
 ב. בנו דוגמה שבה ב- $\tilde{G}$  יש מעגל המילטון.

(9) יהי  $G$  גרף פשוט על  $n \geq 3$  קודקודים.  
נתון:

1.  $n$  מספר זוגי.
  2. כל הדרגות ב- $G$  שוות (כלומר  $G$  גרף רגולרי).
  3. גם  $G$  וגם  $\bar{G}$  קשירים.
- הוכיחו שלפחות באחד מבין  $G$  ו- $\bar{G}$  יש מעגל המילטון.

(10) הוכיחו או הפריכו: אם  $G$  אוילרי דו"צ, אז מספר הצמתים של  $G$  הוא זוגי.

(11) עבור  $A = \{1, 2, 3\}$ , נגדיר  $G = (V, E)$ , כאשר  $V = A \times A$  (9 צמתים), ואת  $E$

קבוצת הצמתים נגדיר באופן הבא:  $\{(a, b), (c, d)\} \in E$  אם ורק אם  $a + b \neq c + d$ .

א. הוכיחו כי  $G$  קשיר.

ב. מה דרגת הצומת  $(1, 1)$  ומה דרגת הצומת  $(2, 3)$ ? כמה קשתות יש ב- $G$ ?

ג. הוכיחו כי אין ב- $G$  מסלול אוילר.

(12) יהי  $G$  גרף פשוט 3-רגולארי על  $n \geq 4$  קודקודים. נתון שב- $G$  יש מעגל המילטון. הוכיחו שתת הגרף של  $G$ , המתקבל ממחיקת כל הקשתות ששייכות למעגל

המילטון, הוא בעל  $\frac{n}{2}$  רכיבי קשירות (בפרט, יש להוכיח ש- $n$  זוגי).

(13) יהיו  $G_1 = (V, E_1)$ ,  $G_2 = (V, E_2)$  שני גרפים על אותה קבוצת קודקודים  $V$ . נגדיר

את הגרף  $G = (V, E_1 \oplus E_2)$ , כאשר  $E_1 \oplus E_2$  הוא ההפרש הסימטרי של שתי

קבוצות הקשתות (כל הקשתות שנמצאות ב- $E_1$  או ב- $E_2$  אבל לא בשניהן).

הוכיחו כי אם ב- $G_1, G_2$  יש מעגל אוילר ו- $G$  קשיר, אז גם בו יש מעגל אוילר.

(14) יהי  $G = (V, E)$  גרף על  $n$  צמתים.

א. הוכיחו כי אם  $|E| > \binom{n-1}{2} + 1$ , אז  $G$  המילטוני.

ב. הוכיחו כי החסם הנ"ל הדוק. כלומר, כי הטענה:

אם  $|E| \geq \binom{n-1}{2} + 1$ , אז  $G$  המילטוני – איננה נכונה.

(15) נתון  $G = (V, E)$  גרף אוילרי שיש בו שלוש קשתות  $e_1, e_2, e_3 \in E$ , שלאחר

הסרתן מהגרף,  $G$  נשאר אוילרי.

א. הדגימו גרף כזה.

ב. הוכיחו כי  $G$  לא דו"צ.

**(16)** נתון  $G$  גרף אוילר, ונגדיר שיטה: נבחר קודקוד, נתחיל ממנו מסלול, ונמשיך אותו כרצוננו כל עוד אפשר בלי לחזור על קשת פעמיים.  
 א. הוכיחו כי בשיטה זו תמיד נקבל מעגל.  
 ב. האם בשיטה זו מתקבל תמיד מעגל אוילר?  
 ג. נתון כי  $G$  גם המילטוני.  
 האם בהכרח יש בו מסלול שהוא גם מעגל אוילר וגם מעגל המילטון?

**(17)** יהי  $G$  גרף פשוט על  $n$  קודקודים, המכיל מעגל המילטון, ונתון כי על ידי השמטת קשתות המעגל מתקבל תת גרף של  $G$  שהוא עץ.  
 האם ניתן על סמך הנתונים לקבוע כמה קשתות בגרף  $G$ ? אם כן, מהו מספר הקשתות?  
 (שאלה זו מופיעה גם בפרק מעגלים מיוחדים)

**(18)** יהי  $G$  גרף, לאו דווקא קשיר, שכל דרגותיו אי זוגיות. נבנה גרף  $H$  שקודקודיו הם קודקודי  $G$  ועוד קודקוד חדש  $v$ , שקשתותיו הם קשתות  $G$  וכל הקשתות האפשריות בין  $v$  לקודקודי  $G$ .  
 הוכיחו שב- $H$  יש מעגל אוילר.

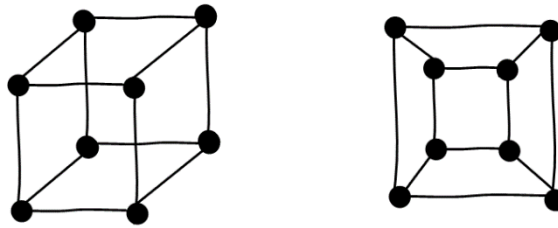
**(19)** הוכיחו או הפריכו: אם  $G = (V, E)$  אוילרי דו צדדי, אז:  $|V| \in \mathbb{N}_{\text{even}}$ .  
 (שאלה זו מופיעה גם בפרק גרף דו צדדי)

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

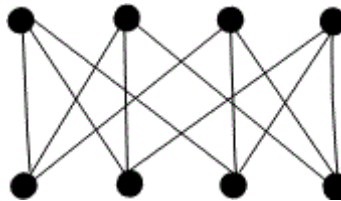
## איזומורפיזם

## שאלות

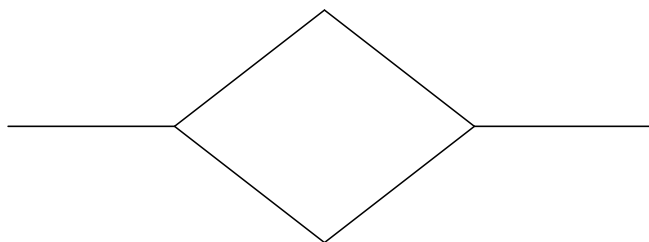
- (1) הוכיחו כי הגרפים הבאים איזומורפיים זה לזה.  
זה אומר שגרף הקובייה התלת מימדי הוא מישורי (כלומר, ניתן לשכן אותו במישור [למצוא גרף איזומורפי לו] מבלי שאף צלע חותכת צלע אחרת).



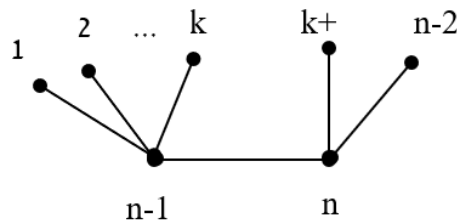
- (2) הוכיחו כי ניתן לשכן במישור את הגרף הבא.  
כלומר, קיים גרף  $G$  איזומורפי לו, מבלי שאף צלע ב- $G$  חותכת צלע אחרת.



- (3) יהיו  $G_1, G_2$  שני גרפים איזומורפיים.  
הוכיחו כי  $G_1$  חסר מעגלים  $\Leftrightarrow G_2$  חסר מעגלים, והסיקו כי  $G_1 \Leftrightarrow G_2$  עץ.  
(4) כמה גרפים שונים זה מזה ואיזומורפיים לגרף שמצויר להלן אפשר לבנות על קבוצת הקודקודים  $\{a, b, c, d, e, f\}$ ?

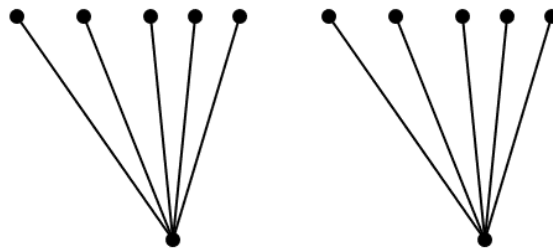


(5) כמה גרפים שונים על קבוצת הקודקודים  $V = \{1, 2, \dots, n\}$  איזומורפיים לגרף הבא:



תנו תשובה לכל  $k, n$  טבעיים המקיימים  $2 \leq k \leq n-3$ .  
הפרידו בין המקרים  $n = 2k+2$ ,  $n \neq 2k+2$ .

(6) כמה גרפים שונים על קבוצת הקודקודים  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_{12}\}$  איזומורפיים לגרף הבא:



(7) הוכיחו או הפריכו:  
אם לשני גרפים אותה רשימת דרגות (כלומר, אם נסדר את דרגות קודקודי כל אחד מהגרפים בסדר עולה, נקבל אותה סדרה), אז הגרפים איזומורפיים.

(8) נגדיר  $C_n$  להיות מעגל על  $n$  קודקודים.  
לאילו ערכים של  $n$  מתקיים ש- $C_n$  איזומורפי ל- $\bar{C}_n$ ?  
(כאשר  $\bar{C}_n$  הוא הגרף המשלים)

(9) יהי  $T$  עץ.  
מהי העוצמה הגדולה ביותר האפשרית לקבוצה של עצים על קבוצת הקודקודים  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , שאף שניים מהם אינם איזומורפיים? (שאלה מאתגרת)

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

# מתמטיקה דיסקרטית

פרק 5 - אינדוקציה

תוכן העניינים

1. אינדוקציה..... 50

## אינדוקציה

## שאלות

הוכיחו באינדוקציה את הטענות הבאות :

$$1+3+5+7+\dots+(2n-1)=n^2 \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^n (4k-1) = n(2n+3) \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1) \quad (3)$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \frac{n}{4n+1} \quad (5)$$

$$\sum_{k=1}^n 2^k = 2(2^n - 1) \quad (6)$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{3}{4^{k-1}} = 4 - \frac{1}{4^{n-1}} \quad (7)$$

$$\sum_{k=1}^{3n} k = 1\frac{1}{2}n(3n+1) \quad (8)$$

$$\sum_{k=1}^{3n} (4k-1) = 3n(6n+1) \quad (9)$$

$$\sum_{k=1}^n (n+k) = \frac{n}{2}(3n+1) \quad (10)$$

$$\sum_{k=1}^n 3^{n+k} = \frac{3^{n+1}(3^n - 1)}{2} \quad (11)$$

$$13 \mid (4^{2n+1} + 3^{n+2}) \quad (12)$$

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} < \frac{2+3}{2} \quad (13)$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)